MA2 – „písemná" přednáška 11.5.2020

V dnešní přednášce probereme poslední část výkladu o křivkovém integrálu – přednáška bude věnována důležité vlastnosti některých vektorových polí v R^3 (R^2), a to t.zv. nezávislosti křivkového integrálu vektorové funkce na cestě.

V minulé přednášce jsme v jednom z příkladů měli dáno vektorové pole $\vec{f}(x,y) = (y^2+2xy, x^2+2xy)$, definované v R^2, a ukázalo se, že integrály po různých křivkách, spojujících body $[0,0]$ a $[1,1]$, se rovnaly, a ukážeme si, že to nebyla náhoda, a že kdybychom si zvolili jakoukoliv neměřitelnou křivku s počátečním bodem $[0,0]$ a koncovým bodem $[1,1]$, pak práce pole $\vec{f}$ by byla opět rovna 2. Ještě jsme pak počítali z tohoto pole integrál po kružnici se středem v počátku, a opět bychom po jakékoliv uzavřené křivce dostali integrál rovný nule, jako byl ten spočítaný po kružnici. A tyto vlastnosti vektorového pole $\vec{f}$ – a to nezávislost práce na cestě, tj. to, že integrál závisí jen na tom, „odkud" a „kam" jdeme, nikoliv „kudy" jdeme, a odtud plynoucí tvrzení, že po dráze uzavřené práce bude nulová – nyní budeme formulovat „přesně":

Definice: Mějme oblast $\omega \subset R^3(R^2)$ (tj. ω je souvislá a otevřená množina) a pole vektorové $\vec{f}$ je definováno v ω. Říkáme, že křivkový integrál vektorové funkce $\vec{f}$ nezávisí v ω na cestě, když platí: pro libovolné křivky (měřitelné) $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ v oblasti ω, takové, že $p.b. K_1 = p.b. K_2$ a $k.b. K_1 = k.b. K_2$, je

$$\int_{\vec{K}_1} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_{\vec{K}_2} \vec{f}\,d\vec{r}.$$

Tedy, práce vektorového pole $\vec{f}$ v oblasti ω, po jakékoliv nečitelné cestě z bodu A do bodu B, $A, B \in \omega$ libovolně zvolené, závisí jen „na bodech A, B, nikoliv na křivce „mezi" body A a B, po které práci počítáme".

<u>Označení</u>: pokud křivkový integrál funkce $\vec{f}$ v ω nezávisí na cestě, a p.b. $\vec{K} = A$, k.p. $\vec{K} = B$, $(\vec{K} \subset \omega)$, pak integrál křivkový se značí obvykle

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r} = \int_A^B \vec{f} d\vec{r}.$$

A pole $\vec{f}$, jehož křivkový integrál v oblasti ω nezávisí na cestě, se nazývá <u>pole konzervativní</u> (v ω).

A důležité je (a i užitečné), že konzervativní pole lze ekvivalentně charakterizovat i dalšími dvěma vlastnostmi (je možné považovat za ekvivalentní definice):

<u>Věta 1.</u> Křivkový integrál funkce $\vec{f}$ v $\omega \subset R^3(R^2)$ nezávisí v ω na cestě (ω - oblast) $\Longleftrightarrow$ pro každou uzavřenou nečitelnou křivku $\vec{K}$ je $\int_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r} = 0$.

(integrál $\vec{f}$ po uzavřené křivce $\vec{K}$ se značí obvykle $\oint_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r}$)

<u>Věta 2.</u> Nechť $\vec{f} \in C(\omega)$, $\omega \subset R^3(R^2)$ oblast, pak platí:
křivkový integrál $\vec{f}$ nezávisí v ω na cestě $\Longleftrightarrow$ existuje funkce $U(X) \in C^{(1)}(\omega)$ taková, že $\vec{f}(X) = \nabla U(X)$, $X \in \omega$.

„<u>Označení</u>": Funkce $U(X)$ z věty 2 se nazývá potenciál pole $\vec{f}$ v ω.
(ve fyzice se potenciálem nazývá zpravidla fce $-U(X)$)

a pole $\vec{f}$, které je gradientem U, tj. $\vec{f} = \nabla U$, v ω, se nazývá pole potenciální.

A dále platí

<u>Věta 3.</u> Je-li $\vec{f} \in C(\omega)$, a $\vec{f} = \nabla U$ v ω, pak pro lib. body $A, B \in \omega$ je

$$\int_A^B \vec{f}\, d\vec{r} = U(B) - U(A). \qquad (*)$$

(křivkový integrál dle Věty 2. zde nezávisí na cestě)

Při pohledu na vzorec pro výpočet křivkového integrálu $\vec{f}$ pomocí potenciálu pole $\vec{f}$ se asi neubráníme srovnání s vzorcem pro výpočet integrálu z f (R) $\int_a^b f(x)dx$, má-li f v $\langle a,b\rangle$ primitivní funkci F, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad !$$

„Podobnost" je ale i ve „vztahu" $f(x)$ a $F(x)$ v $\langle a,b\rangle$, tj. $\underline{F'(x) = f(x)}$ a vztahu mezi $U(X)$ a $\vec{f}(X)$ v ω — $\underline{\nabla U(X) = \vec{f}(X)}$

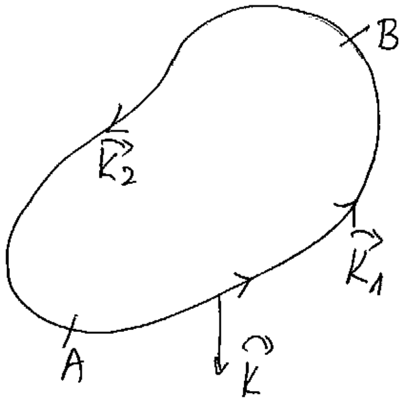
(tedy potenciál $U(X)$ je „něco jako" primitivní funkce k vektorové funkci $\vec{f}$ – i když toto „pozorování" pomůže snadněji si zapamatovat výpočet v (*) – a ve fyzice se „říká" v případě potenciálního pole, že práce pole je dána „rozdílem potenciálu")

Naznačíme si důkazy několika implikací z předchozích vět – berte to jako „cvičení" vlastností a výpočtů křivkových integrálů vektorových funkcí.

K větě 1:

(i) $\Rightarrow$: $\int_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r}$ v ω nezávisí na cestě $\Rightarrow ?$ $\oint_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = 0$

vezměme si uzavřenou křivku $\vec{K}$ v ω (splňující vše, co potřebujeme)



a zvolme na $\vec{K}$ dva body $A \neq B$

pak $\vec{K} = \vec{K}_1 \dotplus \vec{K}_2$ a (dle aditivity)

$$\oint_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_{\vec{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} + \int_{\vec{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r} =$$

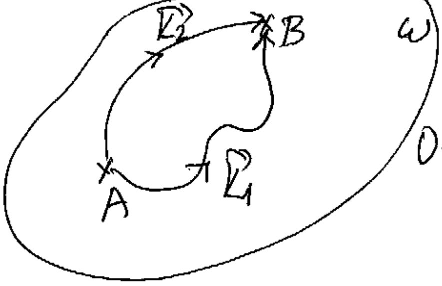
$$= \int_{\vec{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} - \int_{\dot{-}\vec{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r} = 0 \quad \text{(cbd)},$$

neboť $\vec{K}_1$ a $\dot{-}\vec{K}_2$ jsou cesty „od A do B", tedy integrály po nich jsou dle předpokladu stejné.

(ii) $\Leftarrow$: $\oint_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = 0$ $\forall \vec{K}$ uzavřenou v ω $\Rightarrow ?$ $\int_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r}$ nezávisí na cestě v ω:

zvolme si v ω body $A \neq B$, $\vec{K}_1, \vec{K}_2$ jsou křivky v ω (měřitelné),

p.b. $k_i = A$, k.b. $k_i = B$ $(i = 1,2)$. pak



$\vec{K} = \vec{K}_1 \dot{-} \vec{K}_2$ je uzavřená a měřitelná v ω, tj. (dle předpokladu) je

$$0 = \oint_{\vec{K}} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_{\vec{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} - \int_{\vec{K}_2} \vec{f}\, dr \Rightarrow \int_{\vec{K}_1} \vec{f}\, d\vec{r} = \int_{\vec{K}_2} \vec{f}\, d\vec{r} \quad \text{(cbd)}$$

K větě 2 (a zároveň i důkaz vzorce ve větě 3)

(i) $\vec{f} \in C(\omega)$ je potenciální v ω, tj. $\vec{f}(X) = \nabla U(X)$ v ω $\Rightarrow$
$\Rightarrow$? křivkový integrál $\vec{f}$ v ω nezávisí na cestě:

vezměme si libovolnou měřitelnou křivku $\hat{k}$ v ω, nechť $X = \vec{r}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ je její parametrizace, a nechť je orientovaná souhlasně s parametrizací, tj. p.b. $\hat{k} = \vec{r}(a) = A$, k.p. $\hat{k} = \vec{r}(b) = B$, a pak

$$\int_{\hat{k}} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt \underset{\text{dle předpokladu}}{=} \int_a^b \underbrace{\nabla U(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)}_{\left(\text{řetězové pravidlo } = \frac{d\,U(\vec{r}(t))}{dt}\right)}\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d\,U(\vec{r}(t))}{dt}\,dt = \Big[U(\vec{r}(t))\Big]_a^b = U(\vec{r}(b)) - U(\vec{r}(a)) = U(B) - U(A)$$

a tak jsme odvodili vzorec pro výpočet křivkového integrálu potenciálního pole a tedy i ukázali, že integrál nezávisí na cestě $\hat{k}$, jen na počátečním a koncovém bodu křivky!

(ii) Zbývá ještě ukázat, že když integrál pole $\vec{f} \in C(\omega)$ nezávisí v ω na cestě, že pak $\vec{f}$ má v ω potenciál – to je trochu náročnější nejen technicky, tak aspoň naznačme, jak se potenciál může v tomto případě „vytvořit" a ukážeme si na příkladu, že to „funguje".

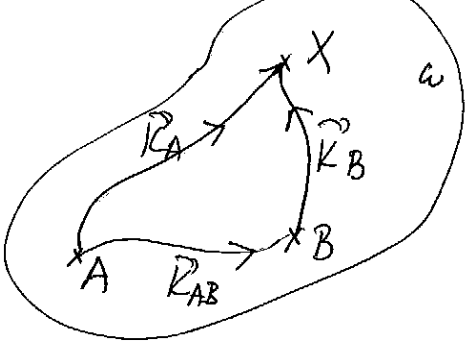
Máme-li vektorové pole $\vec{f}$ v ω (ω je stále oblast v $R^3(R^2)$), jehož integrál nezávisí na cestě, vytvoříme „následující" funkci: zvolíme $A \in \omega$, pak pro lib. $X \in \omega$ je $\int_A^X \vec{f}\,d\vec{r}$ funkcí bodu X, neboť závisí jen na X (při pevném $A \in \omega$), nikoliv na „cestě" od A do X (a $\int_A^X \vec{f}\,d\vec{r} \in R$); a platí (a zde je jediná ta technická obtíž, tak věřme, nebo se podívejte do literatury nebo proberme při konzultaci), že

$$\nabla\left(\int_A^X \vec{f}\,d\vec{r}\right) = \vec{f}(X) \text{ pro } \forall X \in \omega ,$$

tj. $\int_A^X \vec{f}\,d\vec{r}$ je potenciál pole $\vec{f}$ v ω.

Zde při naší „konstrukci" závisí tento potenciál asi na bodu A, označme tedy $\int_A^X \vec{f}\,d\vec{r} = U_A(X)$; lze ale snadno ukázat, že zvolíme-li jako start jiný bod $B \in \omega$, pak $U_A(X)$ a $U_B(X)$ se liší v ω jen o konstantu (opět analogické vlastnosti primitivních funkcí na intervalu (a,b)), a tedy pro výpočet křivkového integrálu $\int_M^N \vec{f}\,d\vec{r}$ v ω můžeme použít potenciál s konstantou, jakou „chceme", na konstantě (opět, jako u $\int_a^b f(x)dx$) zde nezáleží.

A ukážeme si to (opět jako „cvičení"):



$A, B \in \omega$, $A \neq B$, $X \in \omega$ (viz „nákres" situace)

vezmeme křivku $\vec{K}$, tedy $\vec{K} = \vec{K}_B \dot{-} \vec{K}_A \dot{+} \vec{K}_{AB}$, pak $\vec{K}$ je uzavřená křivka v ω, $\vec{f}$ je potenciální,

je tedy $\oint_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r} = 0$, ale též

$$\int_{\vec{K}} \vec{f} d\vec{r} = \int_{\vec{K}_B} \vec{f} d\vec{r} - \int_{\vec{K}_A} \vec{f} d\vec{r} + \int_{\vec{K}_{AB}} \vec{f} d\vec{r} = 0 \text{ , tedy}$$

$$\int_B^X \vec{f} d\vec{r} + \int_A^B \vec{f} d\vec{r} = \int_A^X \vec{f} dr \text{, tedy}$$

$$\underline{U_B(X) + \text{konst.} = U_A(X)}$$ (což jsme chtěli ukázat)

$$\left(\int_A^B \vec{f} d\vec{r} = \text{konst.} \right)$$

<u>A nyní se vraťme k příkladu pole $\vec{f}$ z minulé přednášky:</u>

Měli jsme: $\underline{\vec{f}(x,y) = (y^2 + 2xy \, ; \, x^2 + 2xy)}$, $(x,y) \in R^2$;

pole $\vec{f} \in C^\infty(\omega)$ (dokonce), a hledáme-li $U(x,y)$ tak, aby $\nabla U(x,y) = \vec{f}(x,y)$ v R^2, tak asi nejsnáze „uvidíte", že:

$U(x,y) = xy^2 + x^2y$ v R^2: $\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 + 2xy$, $\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + 2xy$ v R^2;

Pole $\vec{f}(x,y) = (y^2+2xy,\ x^2+2xy)$ je tedy potenciální, a dle věty 2 integrál tohoto pole nezávisí v R^2 na cestě, a dle věty 1 integrál tohoto pole po libovolné uzavřené křivce je nulový (což nám též vyšlo).

Ale asi vás napadne otázka, jak bychom potenciál našli, pokud bychom ho neuhodli" (v případu, kdy by to nebylo tak viditelné)", a druhá otázka je, máme-li potenciál vůbec „hledat", jak poznat, že zadané pole je nebo není potenciální?

Ukažme si nejprve způsob „výpočtu" potenciálu na příkladu $\vec{f}(x,y) = (y^2+2xy\ ;\ x^2+2xy)$ – kdy už víme, že pole $\vec{f}$ je potenciální:

(i) Buď využijeme vztahu $\nabla U = \vec{f}$, tj. hledáme (skalární) funkci $U(x,y)$ tak, aby (1) $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = y^2+2xy$; (2) $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2+2xy$ v R^2:

z (1): $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = y^2+2xy \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = y^2x + x^2y + c(y) \quad (*)$

(integrací dle x dostaneme „konstantu", která je ale konstantou vzhledem k proměnné, podle které integrujeme, tedy může záviset na y, tj. $c = c(y)$ zde); pak z $(*)$ dostaneme, že

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2yx + x^2 + c'(y) \quad \text{a také víme, že} \underset{(z\,(2))}{\frac{\partial U}{\partial y}} = x^2+2xy,$$

tedy „musí" být $c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = C$ (konstanta),

tedy $\underline{U(x,y) = x^2y + y^2x + C,\quad C\in R,\ (x,y)\in R^2}$

(což jsme „uhodli")

(ii) ukažme si ještě „druhou" cestu k výpočtu potenciálu –
– naznačenou v důkazu věty 2: zvolme $A = [0,0]$, pak

$$U(x_0,y_0) = \int_{[0,0]}^{[x_0,y_0]} (y^2+2xy)\,dx + (x^2+2xy)\,dy \quad , (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 :$$

a integrujme po úsečce „od $[0,0]$ do $[x_0,y_0]$", jejíž parametrizace je $\begin{cases} x(t) = x_0 t \\ y(t) = y_0 t \end{cases}$, $t \in \langle 0,1 \rangle$, pak $\begin{cases} x'(t) = x_0 \\ y'(t) = y_0 \end{cases}$ v $\langle 0,1 \rangle$ a

tedy $\underline{U(x_0,y_0)} = \int_0^1 \left[(y_0^2 t^2 + 2x_0 y_0 t^2) \cdot x_0 + (x_0^2 + 2x_0 y_0) t^2 \cdot y_0 \right] dt =$

$$= \int_0^1 3\,(x_0 y_0^2 + x_0^2 y_0) \cdot t^2\,dt = (x_0 y_0^2 + x_0^2 y_0) \cdot \left[t^3 \right]_0^1 =$$

$$= \underline{(x_0 y_0^2 + x_0^2 y_0)} \quad , (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Tedy, opět, potenciál „vyšel" (konstanta je zde nula díky volbě $A = [0,0]$).

<u>A druhý příklad:</u> (téma z minulé přednášky)

$$\underline{\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \quad , (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\} = \omega}$$

Spočítali jsme, že $\oint_{\vec{K}} \vec{f}\,d\vec{r} = 2\pi$, kdykoli $\vec{K}$ byla kružnice o středu v počátku a poloměru $R>0$ (integrál nezávisí na R), tj. <u>integrál $\vec{f}$ po uzavřené křivce v ω je nenulový, tedy pole $\vec{f}$ v ω není potenciální.</u>

A nyní k otázce druhé – jak poznat, že vektorové pole $\vec{f}$, definované v oblasti $\omega \subset R^3 (R^2)$ je potenciální, když hned „nevidíme" potenciál (jako v příkladu prvním) nebo naopak se nepodaří (jako v druhém příkladu) najít uzavřenou křivku v ω, po které je integrál $\vec{f}$ nenulový, tedy víme, že pole $\vec{f}$ potenciální v ω není:

1. <u>podmínka nutná (pro potenciálnost pole $\vec{f}$</u> v oblasti $\omega \subset R^3 (R^2)$)
(vektor $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ budu zde psát „bez" proměnných $X = (x, y, z)$, aby byl zápis „přehlednější"):
Je-li $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\omega)$ potenciální v oblasti $\omega \subset R^3$, pak platí v ω: vektor

$$(*) \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = \vec{o} \quad (= (0,0,0)),$$

(tj. $\dfrac{\partial f_3}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z} = \dfrac{\partial f_3}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$ v oblasti ω)

<u>Důkaz</u>: $\vec{f}$ je potenciální v ω (dle předpokladu), tedy ex. potenciál U v ω, tj. $\vec{f} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$,

a díky předpokladu $\vec{f} \in C^1(\omega)$ je tedy $U(x,y,z) \in C^2(\omega)$, a tedy U má záměnné smíšené derivace 2. řádu, tj. v ω je

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial z},$$ analogicky i další dvě rovnosti.

A pro „zapamatování" vztahu (spíše „levé strany") (*), a hlavně pro užití ve fyzice a i v chemii – ukážeme, jak lze vektor (*) vyjádřit a „chápat":

Zavádí se vektor ∇ " – spíše jako „návod" – říká se „operátor „nabla": $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$; a je-li $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, pak zkusme „formálně" udělat vektorový součin $\nabla \times \vec{f}$:

$$„\begin{matrix} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \times \\ (f_1, f_2, f_3) \end{matrix}" = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \ !$$

(a „vyšlo" to!)

nebo lze vektorový součin vyjádřit i „determinantem" a rozvojem dle 1. řádku ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jsou navzájem kolmé vektory jednotkové) – dostaneme totéž, někomu se to lépe pamatuje:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}$$

Vektor $\nabla \times \vec{f}$ se nazývá rotace $\vec{f}$ a značí též

$$\underline{\operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}} \quad (\text{operátor rotace } \vec{f})$$

Speciálně pro rovinné pole $\vec{f} = (f_1, f_2)$: lze uvažovat toto pole i jako prostorové $\vec{f} = (f_1, f_2, 0)$, a pak ($f_i = f_i(x,y)$)

$\operatorname{rot} \vec{f} = \left(0, 0, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$, tj. nutná podmínka pro $\vec{f}$, $\vec{f} = (f_1, f_2)$ je: $\vec{f} : \omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je potenciální $\Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$ na ω

A příklad 1 Spočítejme rotaci rot $\vec{v}$ obvodové rychlosti při rovnoměrném otáčivém pohybu úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$.
Je-li $\vec{r}$ průvodič bodu, který se otáčí, pak, jak známo, je $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (uvažujeme $\vec{r} \neq \vec{o}$), pak, označíme-li $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ a $\vec{r} = (x, y, z)$ (střed bude počátek), je

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega_2 z - \omega_3 y,\ \omega_3 x - \omega_1 z,\ \omega_1 y - \omega_2 x),$$

a pak

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x},\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) =$$

$$= (\omega_1 + \omega_1,\ \omega_2 + \omega_2,\ \omega_3 + \omega_3) = 2\vec{\omega}$$

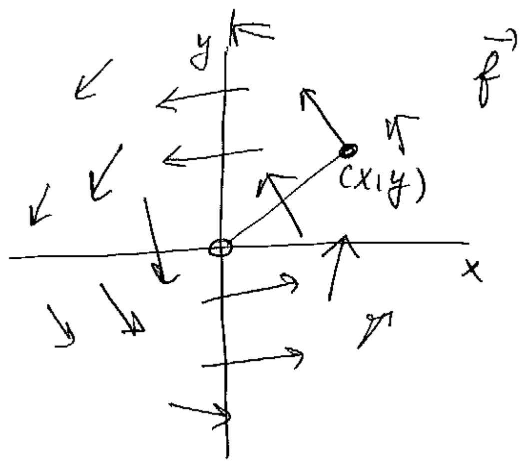
Uznáme, že z tohoto výsledku příkladu je aspoň trochu vidět, proč se operátoru $\nabla \times \vec{f}$ říká rotace – charakterizuje „otáčení" vektorů pole, charakterizuje (lokální) „víry" pole $\vec{f}$.

Příklad 2: Mějme opět pole $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ v $R^2 \setminus \{[0,0]\}$ a spočítejme rot $\vec{f}$!
(zde stačí $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$):

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2+y^2 - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) + y\, 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Platí tedy, že $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{o}$ v $R^2 \setminus \{[0,0]\}$, ale ukázali jsme, že pole $\vec{f}$ není v oblasti $\omega = R^2 \setminus \{[0,0]\}$ potenciální – – tedy pozor – nulovost rotace $\vec{f}$ není podmínkou postačující pro potenciálnost pole $\vec{f}$ v ω. Obrázek „tohoto pole jsme si načrtli na konci minulé přednášky – pole se „točí" kolem počátku – zdroj tohoto „víru" je „díra" v R^2 – – počátek – a to se bude muset asi „zakázat" u podmínky postačující:



A tedy:

1. Postačující podmínky pro potenciálnost vektorového pole

Definice: Oblast $\omega \subset R^2$ je jednoduše souvislá oblast (ve skriptech VŠCHT je označena S-oblast), jestliže $R^2 \setminus \bar{\omega}$ je také oblast (tj. doplněk k uzávěru $\bar{\omega}$ je také souvislá množina v R^2);

nebo jednoduše: $\omega \subset R^2$ je S-oblast, když s každou uzavřenou křivkou v ω je v ω i celý vnitřek křivky;

$M_1 = \{[x,y];\ x^2+y^2 \le R^2, R>0\}$ – S-oblast; ale

$M_2 = \{[x,y];\ \left(\frac{R}{2}\right)^2 \le x^2+y^2 \le R^2\}$ už S-oblast není, a stejně

$M_3 = M_1 \setminus \{[0,0]\}$ není S-oblast (pokud vezmeme jakoukoliv kružnici v M_3 o středu v $[0,0]$, vnitřek v M_3 už není!

Pak platí:

Věta (postačující podmínky pro potenciálnost pole $\vec{f}$ v ω)

Nechť (1) $\omega \subset R^2$ je S-oblast (jednoduše souvislá oblast)

(2) $\vec{f} \in C^1(\omega)$ a $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{o}$ v ω ;

pak $\vec{f}$ je potenciální v ω.

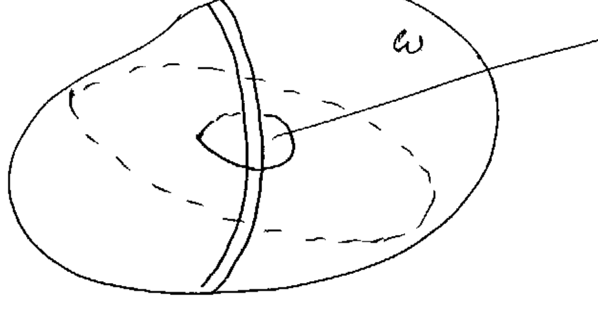
Poznámka:

1) u postačující podmínky pro potenciálnost pole $\vec{f}$ je třeba „kontrolovat", v jaké oblasti $\omega \subset R^2$ je $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{o}$!

2) podmínka na oblast $\omega \subset R^3$ (tj. prostorovou oblast ω), kterou je ještě třeba „přidat" k podmínce $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{o}$ pro potenciálnost $\vec{f}$ v ω je poněkud komplikovanější –

– (viz třeba skripta dr. Štěpánka) – „česky" řečeno, nakreslí-li v oblasti ω uzavřenou křivku, pak S-oblastí v R^3 bude ω tehdy, když bude existovat plocha, jejíž je křivka „okrajem" a tato plocha bude „celá" v oblasti ω –

– v $\omega \subset R^2$ tedy nemohou být žádné „díry" ani „bodové", v R^3 už mohou chybět třeba i „kuličky", jen nesmí v ω být „tunel" procházející oblastí:



pro na tuto křivku nemůžeme „přidat" plochu, jejíž okrajem bude daná křivka a která bude v oblasti ω (představte si třeba „brambor" nebo jablko) a „naše" příklady:

Př. 1) $\vec f(x,y) = (y^2+2xy,\ x^2+2xy)$ v R^2:

(i) R^2 je (jisté) S oblast a

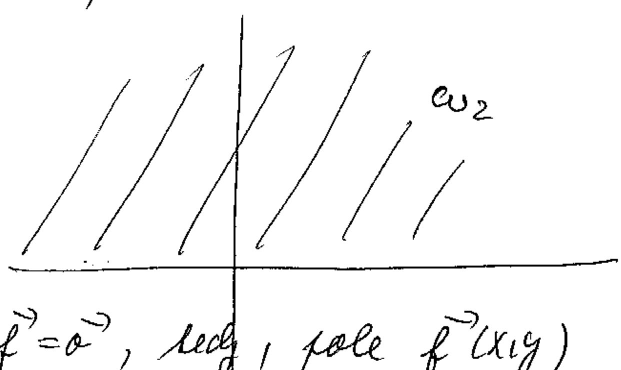
(ii) $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x+2y$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = (2y+2x)$, tj.
$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$ v R^2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\vec f$ je potenciální v R^2 (to už víme, našli jsme potenciál tohoto pole – ale pro „pořádek" jako příklad na postačující podmínky potenciálnosti)

Př. 2) a) $\vec f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ v $\omega_1 = R^2 \setminus \{[0,0]\}$

potenciální není – ověřeno – i když rotace $\mathrm{rot}\,\vec f = \vec o$;
(ω_1 – není S-oblast)

b) vezmeme dané pole $\vec f$ z a), ale
$\omega_2 = \{[x,y];\ y>0\}$ –



– toto už je S-oblast
(vezmeme-li lib. uzavřenou křivku, pak celý její vnitřek v ω_2 leží), $\mathrm{rot}\,\vec f = \vec o$, tedy, pole $\vec f(x,y)$ je v ω_2 potenciální – a zkusme najít potenciál:

Výpočet $U(x,y)$ v ω_2:

Platí v ω_2:

$$(1)\quad \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$(2)\quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

a pak z (1):

$$U(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx \underset{y>0}{=} \int \frac{-y}{y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{-1}{y\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)}\,dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{x}{y} = t \\ \frac{1}{y}\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c(y) \;;$$

a tedy $\displaystyle \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + c'(y) = \frac{x}{y^2+x^2} + c'(y)$

a z (2) dostaneme: $c'(y) = 0$ pro $y>0$ $\Rightarrow$ $c(y) = k$, tj.

$$U(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + k\,,\quad (x,y)\in\omega_2\,,\ k\in\mathbb{R}$$

Další příklady najdete ve sbírkách doporučených, můžete zkusit i na „dubu" domácí úkoly z minulých let, i příklady z ukázkového testu – a můžete psát "dotazy.

A na závěr (azní stručné) uvedeme Greenovu větu pro práci rovinného pole (a její obměnu pro „tok" vektoru, vedoucí k definici důležitému operátoru divergence)

(Greenova věta patří mezi ve fyzice i ve fyzikální chemii velmi důležité, t. zv. integrální věty – Stokesova a Gaussova věta jsou pak další dvě, které jsou rozšířením věty Greenovy z R^2 do R^3 – probíráme to ve „Vybraných partiích matematiky")

Věta (Greenova)

Nechť $\omega \subset \Omega \subset R^2$, ω je oblast a hranice $\partial\omega$ nechť je jednoduchá, uzavřená, po částech hladká, kladně orientovaná křivka, a dále nechť $\vec{f} \in C^1(\Omega)$.

Pak platí:

$$\oint_{\partial\omega} \vec{f}\, d\vec{r} = \iint_{\overline{\omega}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx\,dy .$$

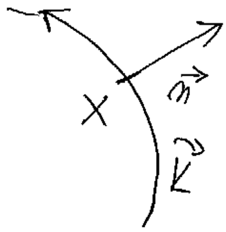
A odtud vidíme, že je-li $\mathrm{rot} \vec{f} = \vec{o}$ v $\overline{\omega}$, pak $\oint_{\partial\omega} \vec{f} d\vec{r} = \vec{o}$.

A snadná je zde i vidět, že pokud chápeme rotaci tak, že charakterizuje lokální „víry" pole – pak Greenova věta říká, že práce po hranici oblasti ω je dána „součtem" ~~intenzity~~ „vírů" v ω – což „vypadá" docela „věrohodně".

„druhá" verze Greenovy věty (vede pak ke známé větě v R^3 – „Gaussově" – ve fyzice)

Velmi důležitou aplikací křivkového integrálu (zvláště pak v R^3 plošného integrálu – zde jednoduchá „verze" v R^2) je t.zv. tok vektoru křivkou, který je definován

$$\int_{\vec K} \vec f \cdot d\vec n \underset{def.}{=} \int_K (\vec f \cdot \vec n)\, ds \,,$$



kde $\vec n$ je vektor normály ke křivce K (tj. vektor kolmý k tečně ke K v bodě křivky), a $\|\vec n\| = 1$!

Je-li „$d\vec r$" $= (dx, dy)$, pak „$d\vec n$" $= (dy, -dx)$

a je-li $\vec f = (f_1, f_2)$, pak

$$\int_{\vec K} \vec f d\vec n = \int_{\vec K} f_1 dy - f_2 dx \;\, „=" \int_{\vec K} g_1 dx + g_2 dy \overset{*}{=}$$

„zavedeme" vektor $(g_1, g_2) = (-f_2, f_1)$

$$\overset{*}{=} \iint_\omega \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_\omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx dy$$

Greenova věta, kde $\vec K = \partial \omega$

Je-li $\vec f = (f_1, f_2)$, pak výraz $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \operatorname{div} \vec f$ (divergence $\vec f$)

a vlastně pomocí operátoru ∇ je $\operatorname{div} \vec f = \nabla \cdot \vec f$ (skalární součin „∇" a $\vec f$)

Analogicky v R^3 je definována divergence vektoru $\vec f = (f_1, f_2, f_3)$:

$$\operatorname{div} \vec f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \quad \left(= \nabla \cdot \vec f \right)$$

A význam $\int_{\vec K} \vec f \, d\vec n$ a divergence $\vec f$, tj. $\operatorname{div} \vec f$:

$\int_{\vec K} \vec f \cdot d\vec n = \int_{\vec K} (\vec f \cdot \vec n)\, ds$ dle významu křivkového integrálu skaláru vlastně „sčítá" součiny průmětu $\vec f$ do $\vec n$ a elementární části ds délky křivky $\vec K$ – to, co proteče "křivkou délky „ds" kolmo ke křivce – tomu to integrálu se proto říká „tok vektoru $\vec f$ křivkou $\vec K$" – a $\operatorname{div} \vec f$ asi popisuje hustotu zdrojů "pole uvnitř" křivky $\partial\omega$, tj. v oblasti, ohraničené křivkou $\vec K = \partial\vec\omega$. A věta pak říká, že pokud se nic „neztrácí", tak to množství tekutiny, co v oblasti ω „vyvře", také proteče hranicí $\partial\omega$ oblasti ω (div $\vec f$ nemůže popisovat i hustotu „zániků" při $\operatorname{div} \vec f < 0$)

A pokračování – četba, nebo Vybrané partie.